



۱- گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا نقطه را جایگذاری می کنیم.

$$y = ax + b = x + 5 \text{ (مجانِب مایل)}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} \sim \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x^2)} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x = \infty - \infty$$

$$\rightarrow b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2 + 3x + 1 - \cancel{x^3} + 2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \sim \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{x^2} = 5$$

۲- گزینه ۱ درست است.

انتگرال بازگشتی است پس برای حل آن از روش جزبه جز استفاده می کنیم.

$$\begin{cases} u = \frac{1}{(x^2 + 4)^n} \\ dv = dx \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du = \frac{-2nx}{(x^2 + 4)^{n+1}} dx \\ v = x \end{cases}$$

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + 4)^n} \Big|_0^1 + 2n \int_0^1 \frac{x^2 + 4 - 4}{(x^2 + 4)^{n+1}} dx = \frac{1}{4^n} + 2n \left(\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 4)^n} - 4 \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 4)^{n+1}} \right)$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{4^n} + 2nI_n - 4nI_{n+1} \Rightarrow 4nI_{n+1} = \frac{1}{4^n} + (2n - 1)I_n$$

$$\xrightarrow{n=4} 32I_5 = \frac{1}{64} + 7I_4$$

۳- گزینه ۱ صحیح است.

$$\begin{aligned}
 z_x &= z_u u_x + z_v v_x \\
 z_x &= \left(\frac{0 - \cos u e^{\sin u}}{(e^{\sin u} + e^{\cos v})^2} \right) \cdot (1) + \left(\frac{0 - (-\sin v) e^{\cos v}}{(e^{\sin u} + e^{\cos v})^2} \right) \cdot (1) = \frac{-\cos u e^{\sin u} + \sin v e^{\cos v}}{(e^{\sin u} + e^{\cos v})^2} \\
 \xrightarrow{(0,0)} z_x &= \frac{-1}{(1+e)^2} \\
 z_y &= z_u u_y + z_v v_y \\
 z_y &= \left(\frac{0 - \cos u e^{\sin u}}{(e^{\sin u} + e^{\cos v})^2} \right) \cdot (-1) + \left(\frac{0 - (-\sin v) e^{\cos v}}{(e^{\sin u} + e^{\cos v})^2} \right) \cdot (1) = \frac{\cos u e^{\sin u} + \sin v e^{\cos v}}{(e^{\sin u} + e^{\cos v})^2} \\
 \xrightarrow{(0,0)} z_y &= \frac{1}{(1+e)^2} \\
 \longrightarrow z_x + z_y &= 0
 \end{aligned}$$

۴- گزینه ۳ صحیح است.

انتگرال خواسته شده، یک انتگرال سطح نوع دوم است که چون سطح ناحیه بسته است از قضیه دیورژانس برای محاسبه آن استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_S F \cdot n \, ds = \iiint_W \text{Div}(F) \, dv = \iiint_W (e^x + e^y + xy) \, dv \\
 \Rightarrow I &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (e^x + e^y + xy) \, dz \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 (e^x + e^y + xy) \, dx \, dy = \int_0^1 \left(e^x + x e^y + \frac{x^2}{2} y \right) \Big|_0^1 dy \\
 &= \int_0^1 \left(e - 1 + e^y + \frac{y}{2} \right) dy = \left(e y - y + e^y + \frac{y^2}{4} \right) \Big|_0^1 = 2e - \frac{y}{4}
 \end{aligned}$$

۵- گزینه ۳ صحیح است.

ابتدا نقاط بحرانی را بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
 \rightarrow \begin{cases} f_x = y - y^2 - 2xy = 0 \\ f_y = x - 2xy^2 - x^2 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y(1 - y^2 - 2x) = 0 \\ x(1 - 2y^2 - x) = 0 \end{cases} \\
 \xrightarrow{x, y > 0} \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} &\Rightarrow x^2 = y^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = y = \frac{1}{2} \\
 \Delta = \begin{vmatrix} -2xy & 1 - 2y^2 - 2x^2 \\ 1 - 2y^2 - 2x^2 & -2xy \end{vmatrix} &\rightarrow \Delta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 > 0 \rightarrow f_{11} < 0 \text{ (Max)} \\
 f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$